Lernhilfe Höhere Mathematik I

Tim Weber

3. 2004

Vielen Dank an Andreas del Galdo für seine Zusammenfassung, Jakob Haufe für seine Musterlösungen, Marco Oster für den Abschnitt über QR-Zerlegung, Robert Schneider für diverse Dokumente und Fingerzeige, Wolfgang K. Seiler für sein ausführliches Skriptum sowie Alexej Swerdlow für seine „HM-Merkzettel".

1 Körper

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$$\mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{Z} \text{ (in Übereinstimmung mit „}0 \notin \mathbb{N}\text{“)}$$

1.1 Der Körper $\mathbb{C}$ der Komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

- *lat.* „zusammengesetzt"; aus Realteil $\Re = x$ und Imaginärteil $\Im = y$
- Definition von i: $i^2 = -1$ (nicht „$i = \sqrt{-1}$"!)
- Komplexe Konjugation: $z = x + iy$, dann ist $\overline{z} = x - iy$
- Rechenregeln ($z, w \in \mathbb{C}$): $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$; $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$; $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- Betrag: $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ (also ist auch $|z| = |\overline{z}|$); außerdem $|z - w| = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$ für $w = u + iv$

1.2 Der Körper $\mathbb{F}_2$ der Binärzahlen

- besteht nur aus den Zahlen 0 und 1
- nicht vergessen: $1 + 1 = 0$; $x = -x$ und $x = x^2$

2 Vektoren

2.1 Lineare (Un-)Abhängigkeit

Seien V ein k-Vektorraum, $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ eine Teilmenge von V sowie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ Elemente aus k. Dann ist M genau dann *linear unabhängig*, wenn aus $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n = 0$ immer $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ folgt, sprich wenn man den Nullvektor nur dann als Linearkombination aller Vektoren darstellen kann, wenn sämtliche Koeffizienten λ null sind. Ansonsten heißt M logischerweise *linear abhängig.*

- Eine Menge, die den Nullvektor enthält, ist *immer* linear abhängig, ebenso wie eine Menge, die zwei oder mehr gleiche Vektoren enthält.

2.2 Orthogonalität

Zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ heißen *orthogonal*, wenn ihr Skalarprodukt null ergibt, wenn also $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ bzw. $(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ (siehe **??**) ist.

2.3 Vektorräume

Sei V ein k-Vektorraum (oder „ein Vektorraum über k“). Das bedeutet, dass die Skalare für Skalarkombinationen aus dem Körper k (meist wird $\mathbb{R}$ benutzt) stammen. Als Beispiel definieren wir den $\mathbb{R}$-Vektorraum U des euklidischen Raumes, dessen Vektoren man sich als Koordinatentripel (x, y und z) vorstellen kann.

Ein *Erzeugendensystem* von V ist eine Menge von Vektoren, mit denen man mittels Linearkombination jeden Vektor aus V darstellen kann. Für U wäre das z.B.

$$E_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Eine *Basis* von V ist ein Erzeugendensystem mit möglichst wenigen (folglich linear unabhängigen) Elementen. Am Einfachsten nimmt man dafür die Einheitsvektoren:

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Das *Erzeugnis* eines Erzeugendensystems M (in Zeichen $[M]$) ist die Menge aller Vektoren, die man durch Linearkombinationen der Vektoren von M ausdrücken kann. Dies ist normalerweise die Menge aller Vektoren des Vektorraumes, zu dem M gehört. Man sagt, der Vektorraum werde durch M *erzeugt.*

Die Mächtigkeit der Basis eines Vektorraumes (also die Anzahl der Elemente darin) entspricht seiner *Dimension*, man spricht von einem *n-dimensionalen* Vektorraum. Besitzt der Vektorraum ein unendliches Erzeugendensystem, so heißt er *unendlichdimensional.*

Eine Basis C von V heißt *Orthogonalbasis* (OB), wenn jeder Vektor in C zu jedem anderen darin orthogonal ist.

Eine Orthogonalbasis E, für die zusätzlich für alle $\vec{e}$ aus E gilt, dass $\|\vec{e}\| = 1$ (also die Vektorlänge gleich 1) ist, heißt *Orthonormalbasis* (ONB).

Der kleinste existierende Vektorraum ist übrigens der *Nullvektorraum*, dessen einziges Element der Nullvektor $\vec{o}$ ist. Sein Erzeugendensystem ist die leere Menge ($\emptyset$), seine Dimension daher 0.

2.3.1 Untervektorräume

Sei M ein Untervektorraum (UVR) des k-Vektorraumes V (in Zeichen: $M \leq V$). Dann muss gelten:

- $\vec{o} \in M$ (jeder Untervektorraum enthält den Nullvektor, ist also nie leer)
- $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \in M$ für alle $\vec{u}, \vec{v} \in M$ und alle $\lambda, \mu \in k$ (jede Linearkombination von Vektoren aus M liegt wieder in M)

Man kann sich einen UVR also als eine Art „abgeschlossenes System“ innerhalb eines anderen Vektorraumes vorstellen. Beispielsweise könnte man einen UVR unseres Beispielraumes U definieren als

$$M = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Anschaulich kann man sich M als eine Ebene im Raum vorstellen, die dritte Koordinate ist immer 0.

2.3.2 Euklidischer Vektorraum

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und „$\cdot$“: $V \times V \to \mathbb{R}$ ein *Skalarprodukt* (siehe **??**). Ein Paar $(V, \cdot)$ heißt dann Euklid*ischer Vektorraum*.

2.3.3 Hermitescher Vektorraum

Ein Paar $(V, \cdot)$ mit den Eigenschaften

1. V ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und
2. „$\cdot$“ ist das Hermitesche Skalarprodukt (siehe **??**)

heißt Hermite*scher Vektorraum*.

2.4 Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Mit diesem Verfahren formt man eine beliebige Basis $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ eines Vektorraums zuerst in eine Orthogonalbasis $C = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}$ und dann in eine Ortho*normal*basis $E = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ um.

1. Schritt: Da es noch keinerlei andere Vektoren gibt, die wir beachten müssen, ist der erste Vektor unserer OB einfach der erste Vektor aus B, also $\vec{c}_1 = \vec{b}_1$.

2. Schritt: Jetzt brauchen wir einen auf $\vec{c}_1$ senkrecht stehenden Vektor $\vec{c}_2$, so dass die beiden $\vec{c}$-Vektoren den selben Vektorraum aufspannen wie $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$. Nun, $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ und $\{\vec{c}_1, \vec{b}_2\}$ spannen den selben Vektorraum auf, aber $\vec{b}_2$ steht im Allgemeinen nicht senkrecht auf $\vec{c}_1$. Wir dürfen ihn aber um einen beliebigen Vektor aus dem bis jetzt aufgespannten Vektorraum (in diesem Fall also nur $[\{\vec{c}_1\}]$) abändern. Also sagen wir:

$$\begin{aligned}
&\vec{c}_2 = \vec{b}_2 + \lambda_1 \vec{c}_1 \quad \text{mit} \quad \vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = 0 \\
&\Rightarrow \vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = \underbrace{\vec{b}_2 + \lambda_1 \vec{c}_1}_{=\vec{c}_2} \cdot \vec{c}_1 = \vec{b}_2 \cdot \vec{c}_1 + \lambda_1 \cdot (\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1) = 0 \\
&\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{c}_1}{\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1}
\end{aligned}$$

Wir rechnen λ_1 und danach $\vec{b}_2 + \lambda_1 \vec{c}_1$ aus, nennen das letztere Ergebnis $\vec{c}_2$ und schreiben diesen als zweiten Vektor unserer OB auf.

3. Schritt: Beim dritten Vektor dürfen wir nun $\vec{b}_3$ sowohl um Vielfache von $\vec{c}_1$ als auch von $\vec{c}_2$ verändern, also gilt:

$$\begin{aligned}
&\vec{c}_3 = \vec{b}_3 + \mu_1 \vec{c}_1 + \mu_2 \vec{c}_2 \quad \text{mit} \quad \vec{c}_3 \cdot \vec{c}_1 = \vec{c}_3 \cdot \vec{c}_2 = 0 \\
&\Rightarrow \vec{c}_3 \cdot \vec{c}_1 = \vec{b}_3 \cdot \vec{c}_1 + \mu_1 \cdot (\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1) + \mu_2 \cdot \underbrace{(\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1)}_{=0} = \vec{b}_3 \cdot \vec{c}_1 + \mu_1 \cdot (\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1) = 0 \\
&\Rightarrow \mu_1 = -\frac{\vec{b}_3 \cdot \vec{c}_1}{\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1} \\
&\text{und entsprechend auch} \\
&\Rightarrow \mu_2 = -\frac{\vec{b}_3 \cdot \vec{c}_2}{\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_2}
\end{aligned}$$

Allgemeines Vorgehen: Das System hinter diesen einzelnen Schritten lässt sich auch kurz mit folgender Formel beschreiben:

$$\vec{c}_n = \vec{b}_n - (\vec{b}_n \cdot \vec{c}_1) \cdot \vec{c}_1 - (\vec{b}_n \cdot \vec{c}_2) \cdot \vec{c}_2 - \ldots - (\vec{b}_n \cdot \vec{c}_{n-1}) \cdot \vec{c}_{n-1}$$

Normieren: Falls nicht nur eine Orthogonalbasis, sondern eine Ortho*normal*basis (also mit Vektorlänge 1) gesucht ist, stellt man diese nach folgender Formel auf:

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{c}_n}{\|\vec{c}_n\|} \quad \text{mit} \quad \|\vec{c}_n\| = \sqrt{\vec{c}_n \cdot \vec{c}_n}$$

Achtung! Falls es sich nicht um einen $\mathbb{R}$-, sondern um einen $\mathbb{C}$-Vektorraum handeln sollte, muss natürlich das HERMITEsche Produkt anstelle des normalen Skalarproduktes verwendet werden (siehe **??**)!

3 Matrizen

3.1 Begriffe

Ein Vektor mit nur einer Spalte heißt *Spaltenvektor*, einer mit nur einer Zeile *Zeilenvektor*.

Die Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren einer Matrix nennt man *Rang* der Matrix.

Bei einer quadratischen Matrix bezeichnet die *Hauptdiagonale* die Einträge, deren Zeilennummer gleich der Spaltennummer ist.

Eine *untere Dreiecksmatrix* (UDM) ist eine Matrix, für die gilt: $x_{ij} = 0 \,\forall\, i, j : i<j$ Sie hat also oberhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen. Entsprechend hat eine *obere Dreiecksmatrix* unterhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen. *Merke:* Bei Dreiecksmatritzen ist die Hauptdiagonale nicht null!

Vertauscht man bei einer Matrix A Zeilen und Spalten, spricht man von einer *transponierten* Matrix und schreibt dafür ${}^tA$. Bei quadratischen Matrizen entspricht das dem Spiegeln an der Hauptdiagonalen. Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Man nennt $A^* =^t \overline{A}$ die *adjungierte* Matrix zu $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Fall A reell ist, sind adjungierte und transponierte Matrix natürlich identisch.

3.2 orthogonale und unitäre Matrizen

„Orthogonal“ und „unitär“ beschreiben beide fast dieselben Eigenschaften, wobei ersteres auf reelle ($Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$) und letzteres auf komplexe Matrizen ($U \in \mathbb{C}^{n\times n}$) angewendet wird. In jedem Fall müssen die Matrizen quadratisch sein.

- Orthogonal bzw. unitär bedeutet, dass für die Matrix $A^* \cdot A = E$ gilt. Da bei reellen Matrizen ja $A^* =^t A$ ist, kann man hier auch ${}^tA \cdot A = E$ als Bedingung fordern.
- Aus QR-Zerlegungen stammende Matrizen Q sind immer orthogonal bzw. unitär, je nachdem ob die zerlegte Matrix reell oder komplex war.
- Das Produkt zweier orthogonaler bzw. unitärer Matrizen ist wieder orthogonal bzw. unitär.
- Eine Matrix ist genau dann orthogonal/unitär, wenn $A^{-1} = A^*$ gilt, es ist also jede orthogonale/unitäre Matrix invertierbar.
- Das Inverse einer solchen Matrix ist wieder orthogonal/unitär.
- Genau dann wenn eine Matrix A orthogonal/unitär ist, gilt $(A\cdot\vec{v})\cdot(A\cdot\vec{w}) = \vec{v}\cdot\vec{w}$ (natürlich je nach Art mit „normalem“ oder HERMITEschen Skalarprodukt).

- Außerdem gilt $(A \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (A^* \cdot \vec{w})$ für $A \in k^{n\times n}$ und alle $\vec{v} \in k^m$, $\vec{w} \in k^n$.

Es gilt des weiteren für lineare Gleichungssysteme mit Koeffizientenmatrix $A \in k^{n\times m}$:

$$\begin{array}{rrcl} & A \cdot \vec{x} & = & \vec{b} \\ \leftrightarrow & Q \cdot R \cdot \vec{x} & = & \vec{b} \\ \leftrightarrow & R \cdot \vec{x} & = & Q^{-1} \cdot \vec{b} = Q^* \cdot \vec{b} \end{array}$$

3.3 Diagonalmatrix

Eine Matrix, bei der alle Einträge außer die auf der Hauptdiagonalen null sind, nennt man Diagonalmatrix. Die einfachste Diagonalmatrix ist die Einheitsmatrix E, bei der alle Einträge auf der Hauptdiagonalen 1 sind, aber man kann durchaus auch andere Diagonalmatrixen definieren. Dafür existiert die Kurzschreibweise $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, die eine $n \times n$-Matrix definiert.

Multipliziert man eine Matrix A von *links* mit einer Diagonalmatrix D (also $D \cdot A$), werden die *Zeilen* von A mit den Diagonaleinträgen von D multipliziert. Multipliziert man eine Matrix A von *rechts* mit einer Diagonalmatrix D (also $A \cdot D$), werden die *Spalten* von A mit den Diagonaleinträgen von D multipliziert.

3.4 Matrixmultiplikation

$$A \in k^{n\times m} \text{ und } B \in k^{m\times p} \quad \Rightarrow \quad A \cdot B = C \in k^{n\times p}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

Vielleicht leichter zu merken: Die Zahl an Zeile y und Spalte x der Ergebnismatrix berechnet sich aus Zeile y von A und Spalte x von B als Summe der Produkte:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0) & (1 \cdot -1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot -3) \\ (4 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 0) & (4 \cdot -1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot -3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 39 & -12 \end{pmatrix}$$

- die *Spalten*anzahl von A muss gleich der *Zeilen*anzahl von B sein
- Matrixmultiplikation ist *nicht* kommutativ, d.h. $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Matrixmultiplikation *ist* assoziativ, d.h. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

3.5 Inverse Matrix

Wir invertieren nur quadratische (also $n \times n$-)Matrizen. Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn alle ihre Spaltenvektoren linear unabhängig sind. In Zeichen:

$$A \in k^{n \times n} \text{ invertierbar} \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{Rang}(A) = n$$

Wenn B die inverse Matrix zu A ist ($B = A^{-1}$), so hat sie die Eigenschaften:

- $B \in k^{n \times n}$ (B hat das gleiche Format wie A)
- $AB = BA = E$
- $B^{-1} = A$ (A zweimal invertiert gibt wieder A)
- $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

3.6 LR-Zerlegung

Seien Z eine untere Dreiecksmatrix mit nur Einsen auf der Diagonalen sowie R eine obere Dreiecksmatrix. Dann lässt sich jede quadratische Matrix $A \in k^{n \times n}$ darstellen als $Z \cdot A = R$.

Dies lässt sich folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} Z \cdot A &= R && \mid \cdot Z^{-1} \text{ „von links“} \\ \underbrace{Z^{-1} \cdot Z}_{=E} \cdot A &= Z^{-1} \cdot R \end{aligned}$$

Da nun $Z^{-1} \cdot Z$ wegfällt, kann man A auch als $Z^{-1} \cdot R$ schreiben. Wir benennen nun Z^{-1} mit L und können nun A schreiben als

$$A = L \cdot R$$

Die inverse Matrix zu A lässt sich schreiben als $A^{-1} = R^{-1} \cdot L^{-1}$.

Der Sinn dahinter besteht darin, dass man ein LGS jetzt wie folgt umformen kann:

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{x} &= \vec{b} \\ L \cdot R \cdot \vec{x} &= \vec{b} \\ \vec{x} &= R^{-1} \cdot L^{-1} \cdot \vec{b} \\ \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Wenn Z invertierbar ist, kann man auch so umformen:

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{x} &= \vec{b} && \mid \cdot Z \\ \underbrace{Z \cdot A}_{=R} \cdot \vec{x} &= Z \cdot \vec{b} \\ R \cdot \vec{x} &= Z \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

3.7 QR-Zerlegung

Sei A eine Matrix bestehend aus Spaltenvektoren $\vec{a}_i$. Normieren wir $\vec{a}_1$ auf die Länge 1, also $\frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}$ erhalten wir den ersten Spaltenvektor unserer Matrix Q. Der erste Spaltenvektor von R sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für den nächsten Spaltenvektor von Q brauchen wir einen Vektor $\vec{q}_2$, der orthogonal zu $\vec{q}_1$ ist *und* die Länge eins hat. Also $\vec{b}_2 = \vec{a}_2 + \lambda_1 \cdot \vec{q}_1$ wobei $\lambda_1 = -\vec{a}_2 \cdot \vec{q}_1$ ist, allgemeiner:

$$\vec{b}_i = \vec{a}_i + \lambda \cdot \vec{q}_1 + \cdots + \mu \cdot \vec{q}_{i-1}$$

$\lambda \cdot \mu$ berechnen sich wie gehabt. Danach müssen wir die $\vec{b}_i$ noch normieren um $\vec{q}_i$ zu erhalten. Um den zweiten Spaltenvektor von R zu erhalten müssen wir $\vec{a}_2$ in der Form $\vec{a}_2 = a \cdot \vec{q}_1 + b\vec{q}_2$ darstellen. $\vec{r}_2$ ist dann

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} -\lambda \\ \|\vec{b}_2\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies führen wir fort, bis wir sämtliche $\vec{a}_i$ verarbeitet haben. Sollten die $\vec{a}_i$ linear abhängig gewesen sein, bekommen wir natürlich $\vec{0}$ für einzelne $\vec{q}_i$. Dies stellt jedoch kein Problem dar. Wir berechnen entsprechende $\vec{r}_i$ und lassen die $\vec{q}_i$ einfach weg. Unsere R-Matrix verkleinert sich jedoch um eine Zeile. Alternativ kann man auch, sollte die Q-Matrix noch nicht eine quadratische Form haben, diese mit Orthonormalvektoren auffüllen, allerdings muss man dann Nullzeilen in der R-Matrix ergänzen. Als Ergebnis haben wir nun 2 Matrizen Q und R wobei gelten muss $QR = A$ (vielleicht Probe machen).

3.8 Determinanten

Determinanten haben folgende Eigenschaften:

- Falls $\det A \neq 0$, sind die Spaltenvektoren von A linear unabhängig und A daher invertierbar.
- Die Determinante ändert sich nicht, wenn man ein Vielfaches einer Spalte (bzw. Zeile) zu einer anderen Spalte (bzw. Zeile) addiert.
- Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente.

- Multipliziert man *eine* der Zeilen oder *eine* der Spalten von A mit der Zahl λ, so wird auch die Determinante mit λ multipliziert.
- Bei einer quadratischen Matrix gilt $\det A = \det\ {}^tA$.
- Es gilt $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ und $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Determinanten berechnet man nur für quadratische Matrizen. 2×2- und 3×3-Matrizen werden nach der SARRUSschen Regel berechnet, während man für größere Matrizen den Entwicklungssatz von LAPLACE benutzt.

3.8.1 Sarrus-Regel

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

Man schreibt die ersten beiden Spalten der Matrix rechts neben die Matrix und bildet Produkte von je 3 Zahlen, die durch die schrägen Linien verbunden sind. Dann werden die nach rechts unten verlaufenden Produkte addiert und davon die nach links unten verlaufenden Produkte subtrahiert.

3.8.2 Entwicklungssatz von Laplace

Sei A eine $n \times n$-Matrix und A_{ij} diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die entsteht, wenn man die i-te Zeile und die j-te Spalte von A streicht. Dann gilt:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \qquad \text{(Entwicklung nach } j\text{-ter Spalte)}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \qquad \text{(Entwicklung nach } i\text{-ter Zeile)}$$

Dabei schafft das Konstrukt $(-1)^{i+j}$ ein schachbrettartiges Muster aus „+“ und „−“ mit einem „+“ in der linken oberen Ecke (also bei $i = j = 1$).

3.8.3 Cramersche Regel

Für ein gutes Beispiel siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/Cramersche Regel`.

4 Abbildungen

Der Begriff „Abbildung“ wird in der Regel synonym zu „Funktion“ gebraucht.

4.1 Lineare Abbildungen

$$\varphi : V \to W$$

φ ist also eine Abbildung vom Vektorraum V in den Vektorraum W. Damit φ linear ist, muss gelten:

$$\varphi(\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot \varphi(\vec{u}) + \mu \cdot \varphi(\vec{v})$$

- Wenn der Nullvektor aus V nicht auf den Nullvektor aus W abgebildet wird (also $\varphi(\vec{o}) \neq \vec{o}$), kann die Abbildung nicht linear sein.
- *Projektionen*[1] (wie z.B. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$) sind immer linear.

4.1.1 Kern und Bild

Die Menge aller Elemente aus V, die bei der Anwendung der Abbildung auf den Nullvektor von W abgebildet werden (sozusagen die „Nullstellen") heißt *Kern* von φ, in Zeichen:

$$\text{Kern}(\varphi) = \{\vec{v} \in V : \varphi(\vec{v}) = \vec{o}\}$$

Die Menge aller Elemente aus W, die bei der Anwendung der Abbildung „getroffen" werden können (sozusagen die „Wertemenge") heißt *Bild* von φ, in Zeichen:

$$\text{Bild}(\varphi) = \{\vec{w} \in W : \exists\, \vec{v} \in V \text{ mit } \varphi(\vec{v}) = \vec{w}\}$$

Es gilt logischerweise $\text{Kern}(\varphi) \subseteq V$ und $\text{Bild}(\varphi) \subseteq W$.

4.2 Bilinearform

Als *Bilinearform* bezeichnet man eine Funktion, die zwei Vektoren einen Skalarwert zuordnet und die linear in ihren beiden Argumenten ist. Bestes Beispiel für eine Bilinearform ist das *Skalarprodukt.*

Formal gesehen ist eine Bilinearform eine Abbildung „·", die von $V \times V$ nach k abbildet und diese beiden Eigenschaften besitzt (es seien $\vec{v}, \vec{w} \in V$ und $\lambda, \mu \in k$):

1. „·" ist bilinear, es gilt also

$$(\lambda \cdot \vec{v}_1 + \mu \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{w} = \lambda \cdot (\vec{v}_1 \cdot \vec{w}) + \mu \cdot (\vec{v}_2 \cdot \vec{w}) \text{ sowie}$$
$$(\vec{v} \cdot (\lambda \cdot \vec{w}_1 + \mu \cdot \vec{w}_2) = \lambda \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}_1) + \mu \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}_2)$$

2. „·" ist symmetrisch, also $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$

4.3 Skalarprodukt

Ein *Skalarprodukt* ist eine Bilinearform $V \times V \to \mathbb{R}$ mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass sie *positiv definit* ist, dass also gilt (mit $\vec{v} \in V$):

1. $\vec{v} \times \vec{v} \geq 0 \,\forall\, \vec{v} \in V$ und
2. $\vec{v} \times \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

[1] *beachte:* eine Projektion ist eine spezielle Abbildung, nicht ein Synonym dafür!

4.4 Hermitesches Skalarprodukt

Würde man das „normale“ Skalarprodukt auf $\mathbb{C}$ anwenden, wäre z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + i \cdot i = 0$$

Eigentlich soll aber das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst das Quadrat seiner Länge ergeben und für alle Vektoren außer $\vec{0}$ positiv sein. Daher definiert man das HERMITEsche Skalarprodukt, das allerdings *kein* Skalarprodukt wie in **??** definiert ist. Statt dessen gelten für das HERMITEsche Skalarprodukt, das eine Abbildung „$\cdot$“ von $V \times V \to \mathbb{C}$ ist, folgende Eigenschaften (mit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$):

1. „$\cdot$“ ist linear im ersten Argument:
$$(\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda \cdot (\vec{u} \cdot \vec{w}) + \mu \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$$
2. „$\cdot$“ ist HERMITE-symmetrisch:
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \overline{\vec{w} \cdot \vec{v}}$$
3. „$\cdot$“ ist positiv definit (s. **??**)

Das HERMITEsche Skalarprodukt wird oft auch (um Verwechslungen vorzubeugen) als $(\vec{v}, \vec{w})$ statt $\vec{v} \cdot \vec{w}$ geschrieben. Es berechnet sich wie folgt:

$$(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v}_1 \overline{\vec{w}_1} + \vec{v}_2 \overline{\vec{w}_2} + \ldots + \vec{v}_n \overline{\vec{w}_n}$$

4.5 Kreuzprodukt und Spatprodukt

Im Gegensatz zum Skalarprodukt, das als Ergebnis eine Zahl hat (daher der Name), hat das Kreuzprodukt, das *nur in* $\mathbb{R}^3$ *definiert* ist, einen $\mathbb{R}^3$-Vektor als Ergebnis. Es berechnet sich wie folgt:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Die Reihenfolge kann man sich leicht herleiten, wenn man sich die erste Spalte (2, 3, 1) merkt. In der zweiten Spalte wird 1 dazu addiert (3, 1, 2), die beiden nächsten Spalten sind achsensymmetrisch zu den ersten beiden (3, 1, 2 und 2, 3, 1).

- Das Kreuzprodukt ist *antikommutativ*, d.h. es gilt $\vec{v} \times \vec{w} = -(\vec{w} \times \vec{v})$.
- Der Betrag des Kreuzproduktes ($|\vec{v} \times \vec{w}|$) entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufspannen.
- Das *Spatprodukt*, dessen Betrag dem Volumen des von drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds entspricht, ist definiert als $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ (mit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$).

- Beim Skalarprodukt gilt $|\vec{v} \cdot \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \angle(\vec{v}, \vec{w})$,
- beim Kreuzprodukt gilt $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin \angle(\vec{v}, \vec{w})$.
- Das Spatprodukt dreier Vektoren entspricht der Determinante einer Matrix mit diesen Vektoren als Spalten.